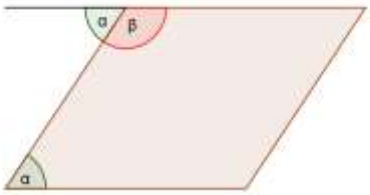
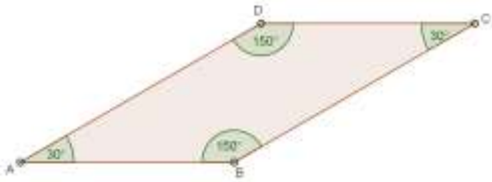
Soluciones Nota nº 1

Problemas Propuestos

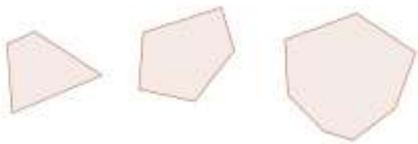
1- En el paralelogramo *ABCD* el ángulo en el vértice *A* es *30º* ¿Cuánto miden los ángulos en los vértices restantes?
Solución: En un paralelogramo, los ángulos contiguos son suplementarios, es decir suman *180º*.



En la figura, los ángulos indicados con α son iguales, por ser alternos internos entre paralelas. En consecuencia, los ánulos contiguos α y β suman *180º*.
En nuestro caso, si el ángulo en el vértice *A* mide *30º*, el ángulo en el vértice *B* medirá *150º*, el ángulo en el vértice *C* medirá *30º* y el ángulo en el vértice *D* medirá *150º*.

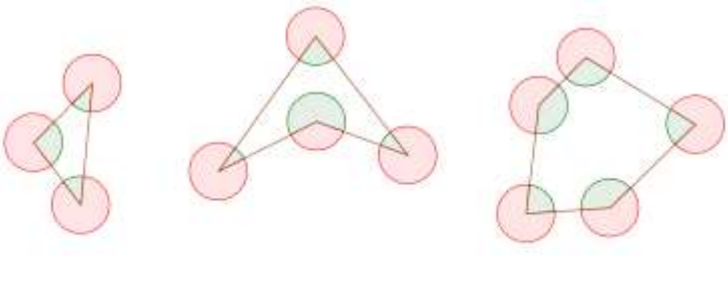


2- Hallar la suma de los ángulos interiores y la suma de los ángulos exteriores de los siguientes polígonos dados.



¿Y cuánto dan las sumas consideradas anteriormente para un polígono convexo de *2012* lados?
Un polígono es convexo si dados dos puntos del mismo, el segmento que los une está contenido en el polígono.

Solución: La suma de todos los ángulos interiores y exteriores de un polígono es igual a *360º* por el número de vértices del polígono, como puede apreciarse en las figuras a continuación:



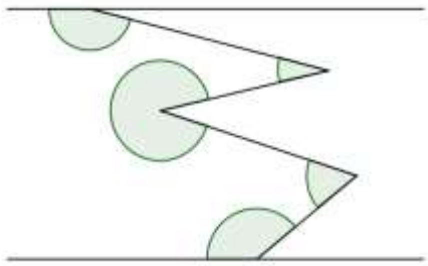
Por otra parte, la suma de los ángulos interiores es el número de vértices menos dos por *180º*. Con esta información podemos hacer una tabla:

Polígono	Suma de sus ángulos interiores	Suma de todos sus ángulos	Suma de sus ángulos exteriores
Triángulo	$1\times180º$	$3\times360º$	$5\times180º$
Cuadrilátero	$2\times180º$	$4\times360º$	$6\times180º$
Pentágono	$3\times180º$	$5\times360º$	$7\times180º$

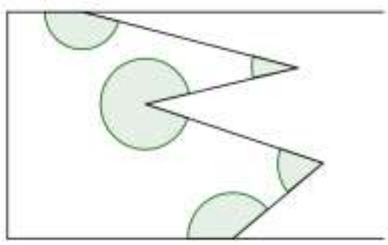
Hexágono	*4×180º*	*6×360º*	*8×180º*
Heptágono	*5×180º*	*7×360º*	*9×180º*

Encontramos que la suma de los ángulos exteriores de un polígono, convexo o no, es el número de vértices más dos por *180º*. En consecuencia, para un polígono de *2012* lados, la suma será *2012×180º* es decir *362.160º*.

3- Una poligonal une dos paralelas dividiendo la franja limitada por las paralelas en dos regiones. Hallar la suma de los ángulos de la poligonal marcados en una de las regiones. ¿y cuál es la suma de los ángulos en la otra región?

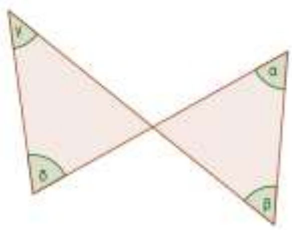


Solución: Cerrando la poligonal con una recta perpendicular a las rectas paralelas, como lo indica la figura:

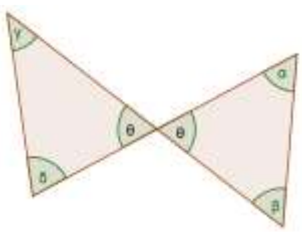


queda determinado un heptágono con dos de sus ángulos interiores de *90º*. Como la suma de los ángulos interiores de un heptágono es igual a *5×180º* , quitando los dos de *90º* tendremos la suma pedida igual a *4×180º*.
Pregunta: Si la poligonal del problema tuviera *n* vértices en lugar de *5*, cuánto sumarían los ángulos a la izquierda de la poligonal? cuánto sumarían los ángulos a la derecha de la poligonal?

4- Dados los ángulos marcados en la figura, calcular α +β – γ – δ:

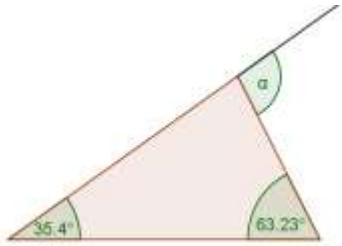


Solución: La figura puede descomponerse en dos triángulos con un ángulo θ común, por ser opuestos por el vértice.



De modo que $\alpha+\beta=180-\theta=\gamma+\delta$, resulta $\alpha+\beta=\gamma+\delta$, luego $\alpha+\beta-\gamma-\delta=0$.

5- Calcular el valor de α (ángulo exterior)

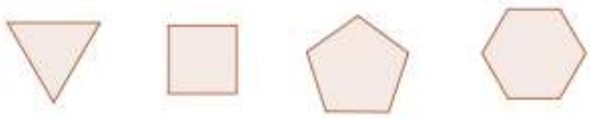


Solución: La suma de dos ángulos interiores de un triángulo es *180º*. En nuestro caso:

$$180-\alpha+35,4+63,23=180$$

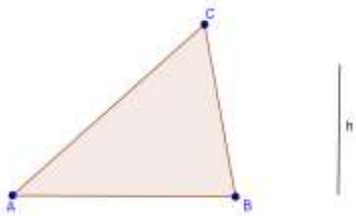
es decir α = *35,4º* + *63,23º* = *98,63º*.

6- Determinar el valor de los ángulos interiores y exteriores de un polígono regular de 3, 4, 5 y 6 lados.

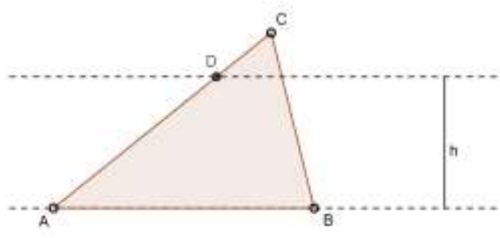


Solución: Como los ángulos interiores son iguales, cada uno mide la suma de los ángulos interiores dividido el número de vértices. Para el triángulo es *60º = 180º/3*, para el cuadrado *90º = 360º/4*, para el pentágono *108º = 540º/5* y para el hexágono *120º = 720º/6*.

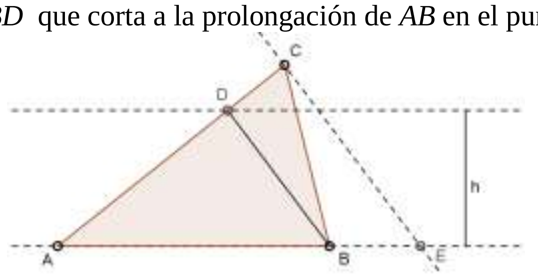
7- Dado un triángulo *ABC*, construir con regla y compás, otro triángulo de igual área que *ABC* y una de las alturas de longitud *h* dada.



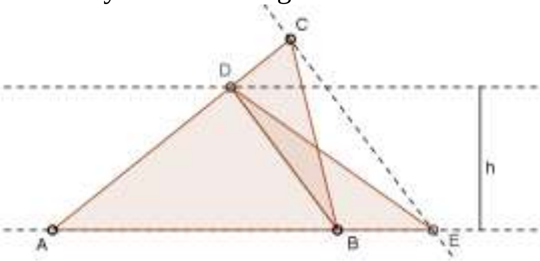
Solución: Si *h* es menor que alguna de las alturas del triángulo *ABC*, por ejemplo *h* es menor que h_C , trazamos una paralela a *AB* a distancia *h* que corte a *AC* en el punto *D*.



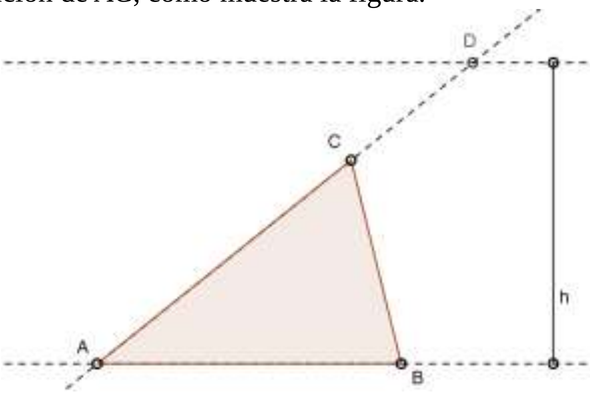
Por *C* trazamos una paralela a *BD* que corta a la prolongación de *AB* en el punto *E*.



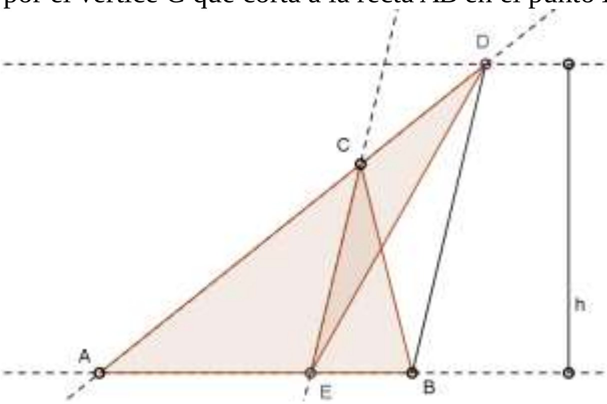
Por la construcción, los triángulos *BCD* y *BED* tienen igual área.



En consecuencia, los triángulos *ABC* y *AED* tienen igual área y *h* es una altura de *AED*.
En otro caso, si *h* fuera mayor que las alturas de *ABC*, consideramos el punto *D* en la intersección de la paralela a *AB* con la prolongación de *AC*, como muestra la figura.



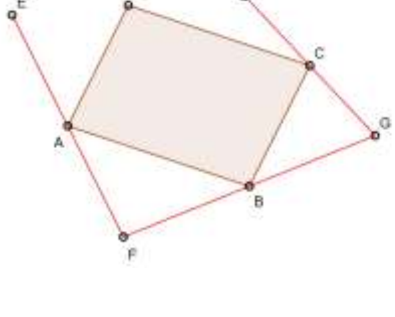
Trazamos una paralela a *BD* por el vértice *C* que corta a la recta *AB* en el punto *E*.



Como antes, los triángulos *CBD* y *CED* tienen igual área, de modo que *ABC* y *AED* tienen igual área y *h* es una altura de *AED*.

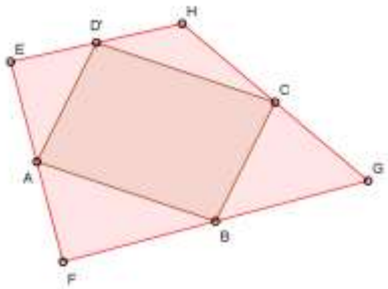
8- Dado un paralelogramo cuyos vértices son los puntos medios de los lados de un cuadrilátero, dibujar dos de estos cuadriláteros.

Solución: Consideremos el paralelogramo *ABCD* y un punto *E* como en la figura.



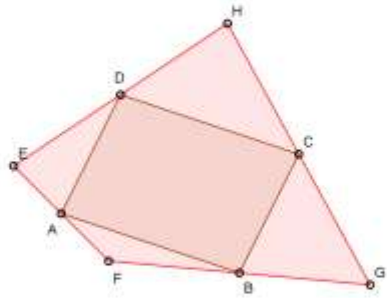
Los puntos *F*, *G* y *H* se toman de modo que *A*, *B* y *C* sean los puntos medios de los segmentos *EF*, *FG* y *GH* respectivamente. Para ver que *EFGH* es uno de los cuadriláteros buscado, bastará mostrar que *D* es el punto medio de *HE*.

Consideremos *D’* el punto medio del segmento *HE*.



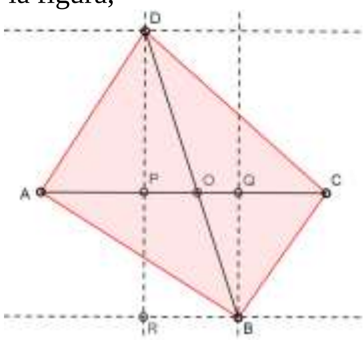
ABCD’ es el paralelogramo de Varignon del cuadrilátero *EFGH*. Resulta entonces que *ABCD’* y *ABCD* son paralelogramos, de modo que, tanto *D* como *D’* se encuentran en la intersección de recta paralela a *AB* que pasa por *C* con la recta paralela a *BC* que pasa por *A*, debe ser *D’* = *D*.

Para construir otro cuadrilátero, bastará cambiar en la construcción anterior el punto de partida *E*.



9- En un cuadrilátero *ABCD*, el triángulo *ABC* tiene área $5cm^2$ y el triángulo *ACD* tiene área $7cm^2$. ¿En qué relación corta la diagonal *AC* a la diagonal *BD*?

Solución: Si trazamos rectas paralelas y rectas perpendiculares a la diagonal *AC* por los puntos *B* y *D*, se obtienen los puntos *P, Q* y *R* dados por la figura,



Donde además *O* es el punto de intersección de las diagonales j del cuadrilátero. Por el teorema de Thales:

$$\frac{DO}{OB} = \frac{OP}{PR}$$

Pero $PR = QB$ es la altura de *ABC* correspondiente al lado *AC*. También, *DP* es la altura de *ACD* correspondiente al lado *AC*. El cociente entre las áreas de *ACD* y *ABC* es:

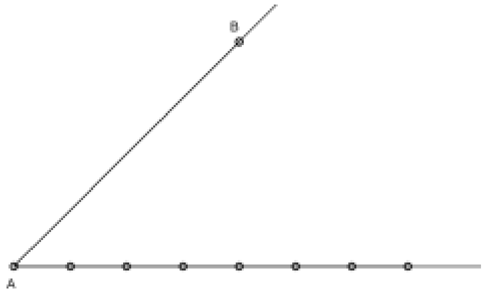
$$\frac{\frac{1}{2} AC \times DP}{\frac{1}{2} AC \times QB} = \frac{7}{5}$$

De modo que la relación buscada en 7/5.

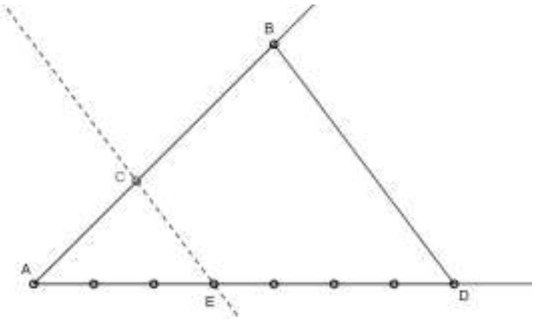
10- Usando regla y compás, dividir un segmento *AB* por un punto *C* tal que

$$\frac{AC}{CB}=\frac{3}{4}$$

Solución: En los lados de un ángulo, usando un compás, marcamos el segmento *AB* y 7 segmentos iguales como muestra la figura.



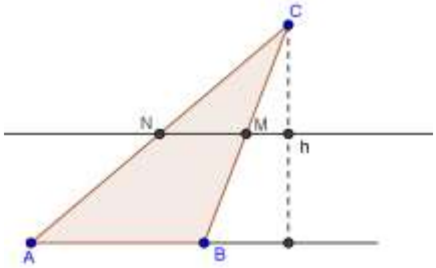
Como se aprecia en la figura;



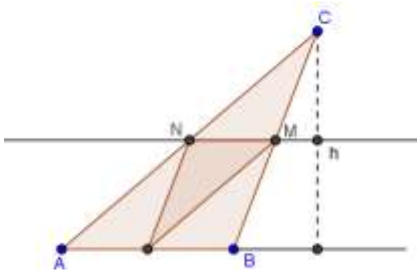
unimos el punto *D* con *B* y trazamos una paralela por *E* al segmento *BD* para cortar a *AB* en el punto *C* . Por el teorema de Thales resulta:

$$\frac{AC}{CB}=\frac{AE}{ED}=\frac{3}{4}$$

11- Dado el triángulo *ABC* de área *20 cm²* y altura *h* respecto del lado *AB*, por el punto medio *D* de *h* se traza la paralela a *AB* que corta a los lados *AC* y *BC* en los puntos *N* y *M* respectivamente. Calcular el área de *NMC*.

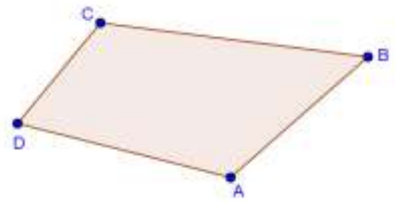


Solución: Por el teorema de Thales, *M* y *N* resultan los puntos medios de los lados *BC* y *AC* respectivamente. Usando los puntos medios de *ABC*, podemos descomponer a éste en cuatro triángulos iguales:

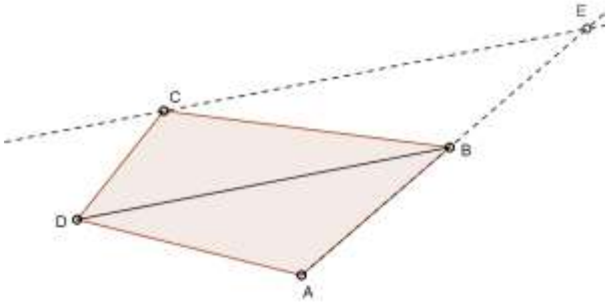


Obtenemos que el área de *NMC* es $5\ cm^2$

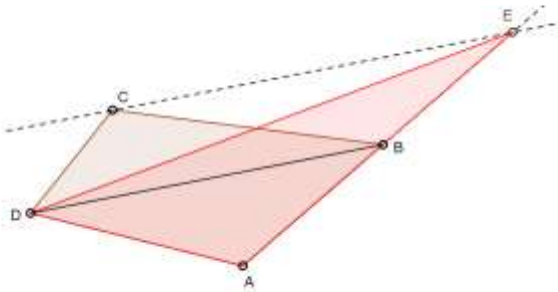
12- Dado el cuadrilátero *ABCD*, construir con regla y compás un triángulo de la misma área.



Solución: Por el punto *C* trazamos una paralela a la diagonal *BD* que corta a la prolongación del lado *AB* en el punto *E*.

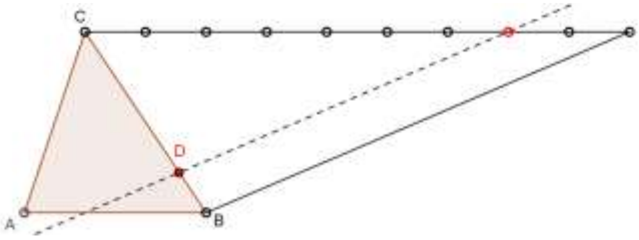


Como los triángulos *DBC* y *DBE* tienen igual área, el cuadrilátero *ABCD* y el triángulo *AED* tienen igual área.



13- En el triángulo *ABC* de área $9cm^2$. Usando regla y compás trazar una recta por uno de sus vértices que divida al triángulo *ABC* en dos triángulos, uno de área $2cm^2$ y otro de área $7cm^2$.

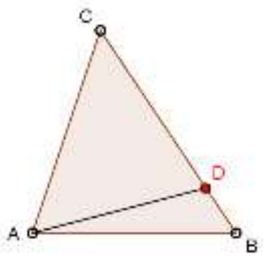
Solución: Dividimos uno de los lados del triángulo en la relación *7:2*, como se ilustra en la figura:



Es decir:

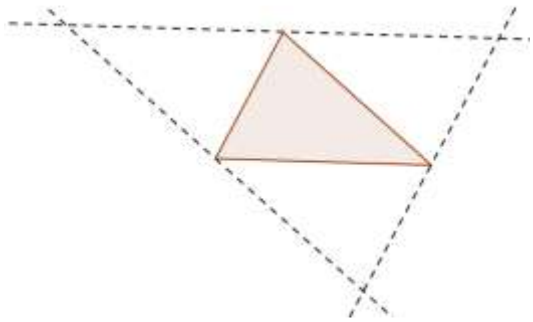
$$\frac{CD}{DB} = \frac{7}{2}$$

Con el punto *D* se descompone el triángulo dado en los triángulos *ABD* y *ADC* en las condiciones pedidas, como se indica en la figura:

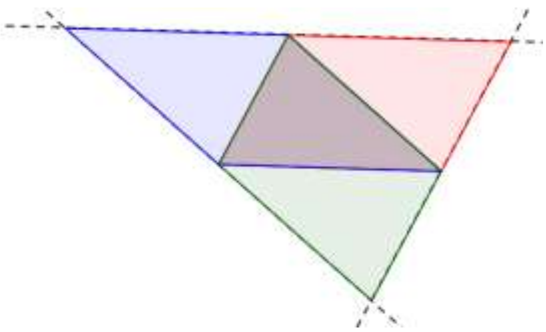


17- Por cada vértice de un triángulo dado, se trazan paralelas al correspondiente lado opuesto. Estas rectas delimitan un triángulo de *20cm²* de área. Hallar el área del triángulo dado.

Solución: La figura ilustra la situación,



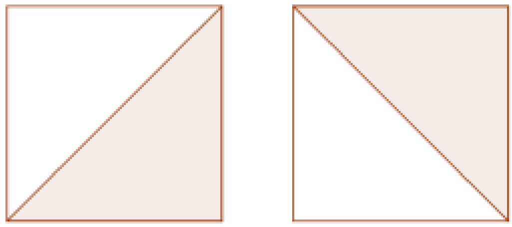
En figura siguiente, se observan tres paralelogramos que se descomponen, cada uno de ellos, en dos triángulos iguales al triángulo dado:



De donde surge que el área del triángulo es $20cm^2 \div 4 = 5cm^2$.

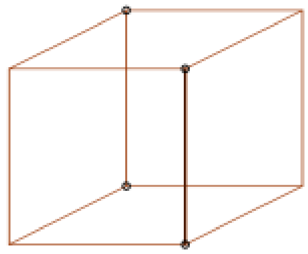
18- En un cubo de *1cm* de arista se consideran todos los triángulos cuyos vértices son vértices del cubo. ¿Cuántos triángulos hay? ¿Cuántos son equiláteros? ¿Cuántos son rectángulos? ¿Cuántos son isósceles no equiláteros? ¿Cuánto miden sus áreas?

Solución: Comencemos con los triángulos que se forman sobre una cara del cubo.

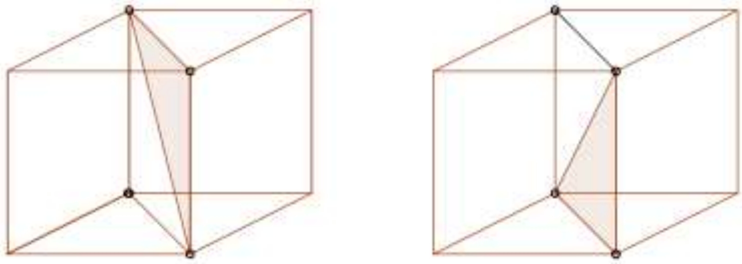


Son todos rectángulos e isósceles, hay cuatro por cada cara, en total *24* sobre las caras del cubo. Este caso se caracteriza por lo siguiente: *dos aristas del cubo son aristas del triángulo*.

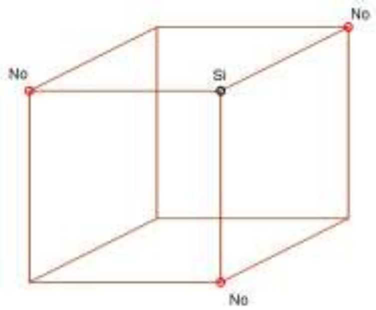
Otro caso podría ser aquél en que el cubo y el triángulo *comparten sólo una arista del cubo*. En este caso, para formar el triángulo, los extremos de la arista común sólo pueden unirse con los vértices de la arista opuesta, tal como se muestra en la figura,



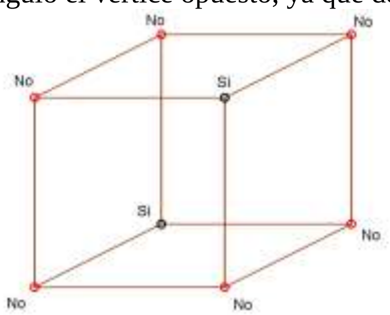
es decir el triángulo, se encuentra en un rectángulo donde uno de dos sus lados son una aristas del cubo y los otros dos son diagonales de caras del cubo.



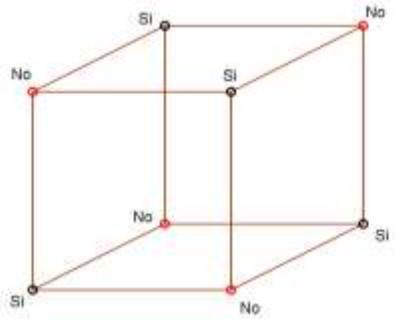
Como antes, hay cuatro de éstos triángulos, rectángulos pero no isósceles, por cada par de aristas opuestas, es decir hay *24* triángulos de esta clase.
Una clase más, será aquella de los triángulos que no comparten aristas con el cubo. En este caso, si un vértice del cubo es vértice del triángulo, en principio, hay tres vértices del cubo que no pueden formar parte del triángulo:



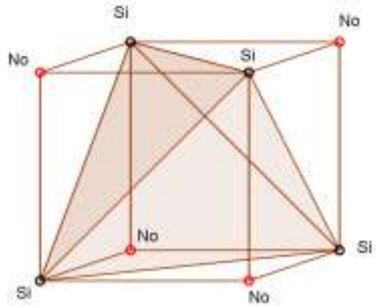
Pero tampoco puede ser parte del triángulo el vértice opuesto, ya que de lo contrario la situación sería:



Finalmente, las posibilidades son las que surgen de la figura:



Nota que en tal caso las aristas son diagonales de caras, y los triángulos son las cuatro caras de un tetraedro regular.



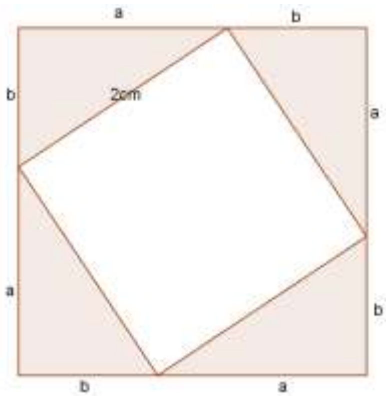
Como los vértices marcados con No forman otro tetraedro regular, hay cuatro triángulos equiláteros más, lo que hace un total de *8* triángulos equiláteros.
Hemos formado triángulos que comparten con el cubo 2, 1 o ninguna arista. Es preciso observar que el cubo no puede compartir 3 aristas con ningún triángulo.
De análisis precedente tenemos la siguiente respuesta al problema:
¿Cuántos triángulos hay? *24 + 24 + 8*
¿Cuántos son equiláteros? *8*
¿Cuántos son rectángulos? *48*
¿Cuántos son isósceles no equiláteros? *24*
¿Cuánto miden sus áreas? $\frac{1}{2}cm^2$ es el área de los triángulos rectángulos isósceles; el área de los triángulos rectángulos no isósceles es $\frac{\sqrt{2}}{2}cm^2$ y $\frac{\sqrt{3}}{2}cm^2$ es el área de los triángulos equiláteros.

19- Entre los cuadriláteros cuyas diagonales miden *2cm* y se cortan en sus puntos medios, ¿Cuál es el área máxima? ¿Hay uno de área mínima? Sugerencia: usar un programa de geometría dinámica como CABRI GEOMETRE o VISIO para visualizar la situación y experimentar.

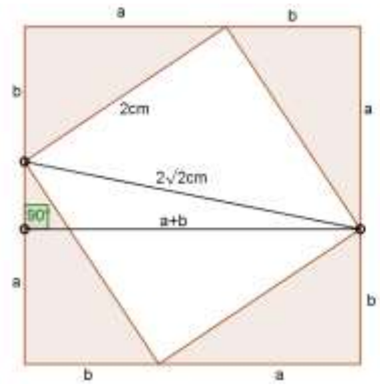
Solución: Se tratan de rectángulos, esto es consecuencia de las propiedades siguientes:

- *Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan en sus puntos medios, el cuadrilátero es un paralelogramo.*
- *Si las diagonales de un paralelogramo son iguales, entonces se trata de un rectángulo.*

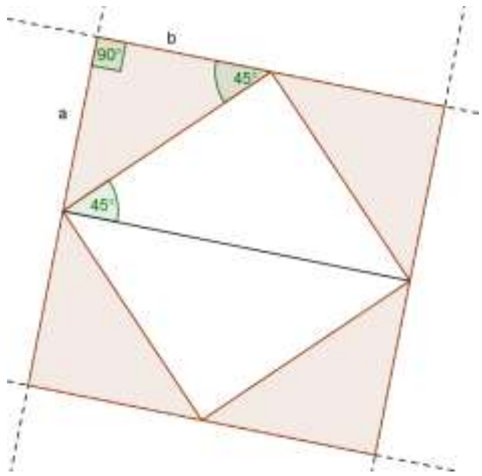
Consideremos dos rectángulos iguales de lados *a* y *b* cuya diagonal mide *2cm*. Con cuatro mitades de estos rectángulos formamos un cuadrado de lado *a + b* como muestra la figura:



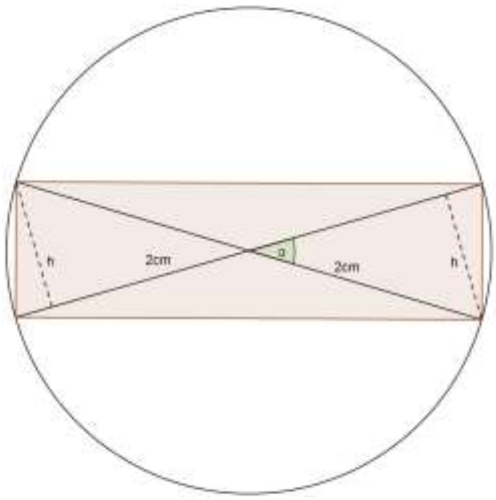
El área de este cuadrado es $(a+b)^2 = 4+2ab$. Pero $a+b \le 2\sqrt{2}$



es decir $1+2ab \le 8$ y el área a×b del rectángulo no puede exceder a $\frac{7}{2}$. Veamos que para alcanzar este valor, debe ser $a+b = 2\sqrt{2}$ pero esto ocurre sólo cuando el lado del cuadrado circunscripto es paralelo la lado del cuadrado inscripto, es decir cuando a = b, como puede deducirse de la figura:



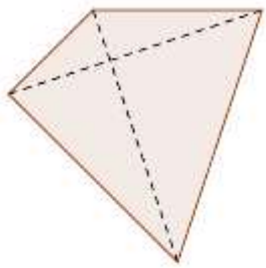
Para el área mínima, notemos que las diagonales pueden cerrarse cada vez más para producir rectángulos de áreas más pequeñas.



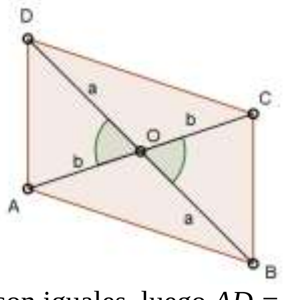
Al cerrase el ángulo α las alturas *h* de los triángulos que componen el rectángulo, son cada vez más pequeñas. El área del rectángulo es *2h*. Se concluye que no hay un rectángulo de área mínima.

MISCELÁNEAS

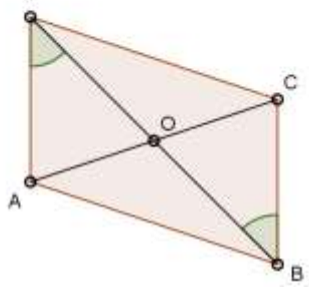
1- Si un cuadrilátero tiene sus diagonales iguales, ¿Es un rectángulo?
Respuesta: No, por ejemplo:



2- Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan en sus puntos medios, ¿Es un paralelogramo?
Respuesta: Si. En la figura



Se aprecia que los triángulos *AOD* y *BCO* son iguales, luego *AD* = *BC* y los ángulos marcados en *D* y *B*



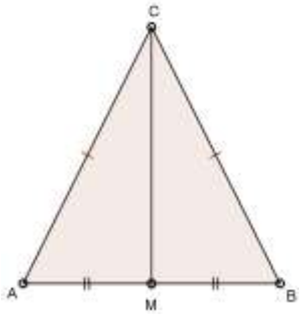
son iguales, es decir *AD* es paralelo a *BC*.

3- Si un cuadrilátero tiene sus cuatro lados iguales, ¿Es un cuadrado?
Respuesta: No, puede ser un rombo.

4- ¿Las diagonales de un rombo son perpendiculares?
Respuesta: Si. Para justificarlo, veamos primero algunas propiedades:

- *En un triángulo isósceles, el vértice que no está en la base, se encuentra el la recta perpendicular a la base que pasa por el punto medio de la misma.*
- *Una diagonal de un rombo descompone al mismo en dos triángulos isósceles iguales que comparten a dicha diagonal como base.*

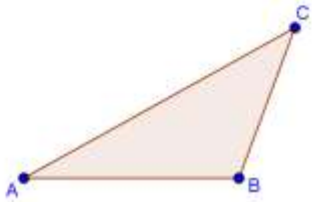
El primer enunciado resulta de descomponer el triángulo isósceles *ABC* usando el segmento que une *C* con el punto medio de su base *AB*.



ABC queda descompuesto en dos triángulos iguales, los ángulos en el vértice común *M* son iguales y suplementarios, deben medir 90º.
El segundo enunciado es claro por la definición de rombo, *sus cuatro lados iguales*.
Ahora, de los enunciados anteriores obtenemos que en un rombo *ABCD* la perpendicular a la diagonal *AC* que pasa por el punto medio de ésta, también pasa por los puntos *B* y *D*, de modo que las diagonales son perpendiculares.

5 - Si un ángulo de un paralelogramo es recto, ¿se trata de un rectángulo?
Respuesta: Si. Ángulos contiguos en un paralelogramo son suplementarios.

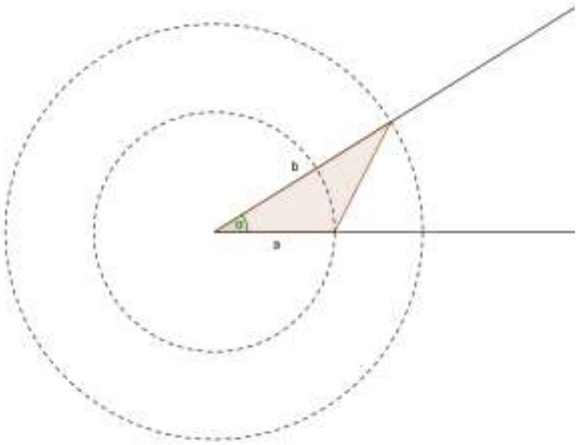
6- Construya con regla y compás 2 triángulos distintos que tengan los mismos ángulos que *ABC*.



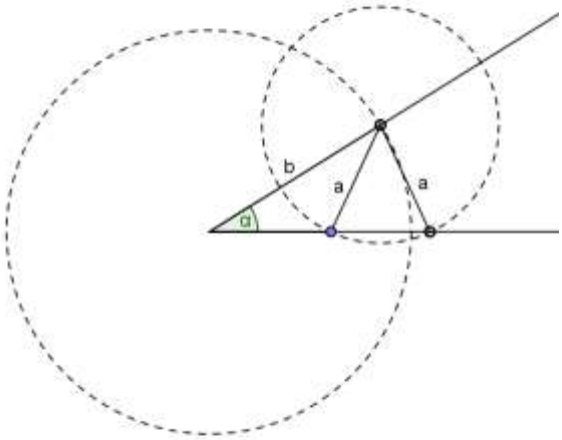
Solución: Uno puede ser el triángulo formado por puntos medios de los lados del triángulo. Otro, trazando paralelas a cada por el vértice que no pertenece al lado.

7- Dados los segmentos *a* y *b* y el ángulo α, construya con regla y compás, 4 triángulos distintos que tengan *a* y *b* por lados y uno de los ángulos sea igual a α.

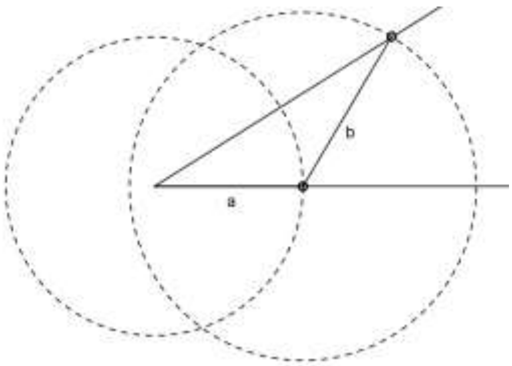
Solución: Uno de estos triángulos es el que tiene a α como el ángulo comprendido entre los lados *a* y *b*. Esto se obtiene marcando con el compás segmentos de las longitudes de *a* y *b*, respectivamente, sobre los lados del ángulo.



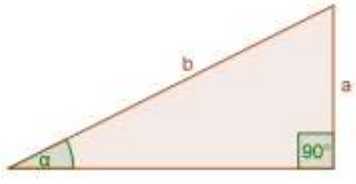
Otros dos triángulos pueden formarse marcando sobre uno de los lados del ángulo un segmento de longitud *b* y una circunferencia de radio *a* con centro en el extremo del segmento anterior que no sea el vértice el ángulo.



Finalmente, uno más procediendo como en el caso anterior pero intercambiando los roles de *a* y *b*.



8- Se puede hacer lo mismo que en el ejercicio 7 si se dan los segmentos a y b y el ángulo α como en la figura?



Respuesta: No, los dos triángulos de la figura 36 precedente, coincidirían.